

## FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES (II)

### Límites y continuidad

**Ejercicio 1.** Calcula los límites siguientes utilizando propiedades básicas. Indica en cada caso el dominio

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} & \text{ii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \\ \text{iii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x - (1 - y)}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}} & \text{iv)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \text{sen} \frac{1}{x} \\ \text{v)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} (x + y) \text{sen} \frac{1}{x + y} & \text{vi)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x^2 - y^2) \cos \frac{1}{x - y} \end{array}$$

**Ejercicio 2.** Calcula los límites iterados correspondientes a los límites dobles siguientes e indica si con el resultado obtenido se puede afirmar que existe o que no existe el límite doble.

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^4 - y^3}{3x^4 + 2y^3} & \text{ii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \sin \frac{1}{x} \\ \text{iii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{iv)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{array}$$

**Ejercicio 3.** Calcula los límites por rectas correspondientes a los límites dobles siguientes e indica si con el resultado obtenido se puede afirmar que existe o que no existe el límite doble.

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{ii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ \text{iii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} (x^2 + y^2) & \text{iv)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x + y - 1}{\sqrt{x} - \sqrt{1 - y}} \end{array}$$

**Ejercicio 4.** Calcula los límites siguientes por polares e indica si con el resultado obtenido se puede afirmar que existe o que no existe el límite doble.

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{ii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ \text{iii)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{iv)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x} (x^2 + y^2) \\ \text{v)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (x - 1) \frac{x^2 + y^2 - 2}{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} & \text{vi)} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} y^2 \frac{x^2 - y^2 - 1}{(x - 1)^2 + y^2} \end{array}$$

**Ejercicio 5.** Determinar  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^n}{x^2 + y^2}$ , según los valores de  $n \in \mathbb{N}$ .

**Ejercicio 6.** Dada  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $f(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2 - xy}$ , se pide determinar que relación deben verificar  $p, q \in \mathbb{N}$ , para que exista  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ .

**Ejercicio 7.** Estudiar la continuidad de las funciones de los ejercicios 1 y 4, considerando que toman el valor cero fuera del dominio.